

Rappel: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n'est dérivable

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + r(x)$$

$$\text{où } r(x_0) = 0 \text{ \& } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Notation §.4 ($o(|x-x_0|^n)$, $O(|x-x_0|^n)$)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$,

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage

de x_0 . On écrit:

$$(i) \quad f(x) = g(x) + o(|x-x_0|^n) \text{ si } \begin{pmatrix} r(x) = \\ f(x) - g(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x_0) = g(x_0) \quad (\Leftrightarrow r(x_0) = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \right)$$

$$(ii) \quad f(x) = g(x) + O(|x-x_0|^n) \text{ si}$$

$$\exists \delta > 0, C > 0 \text{ tq } f(x_0) = g(x_0)$$

$$\text{et } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad \left| \frac{f(x) - g(x)}{(x-x_0)^n} \right| \leq C$$

Remarque 8.5:

(i) Ces notations sont introduites essentiellement pour aller plus vite dans les calculs.

L'expression exacte que la fonction cachée par $o(|x-x_0|^n)$ ne m'intéresse pas, seules ses propriétés qualitatives m'intéressent.

(ii) Une façon de montrer

$$f(x) = g(x) + o(|x-x_0|^n),$$

est de vérifier :

$$(a) \quad f(x_0) = g(x_0)$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

$$(iii) \quad f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^{n+1})$$

$\Downarrow$

$$f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^n)$$

$\Downarrow$

$$f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^n)$$

Définition 8.6 (Développement limité)

Soit $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
définie au voisinage de x_0 .

Un développement limité de f
d'ordre n autour de x_0 est

la donnée de $n+1$ nombres
réels $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + O(|x - x_0|^{n+1})$$

Remarque 8.7

- (i) un DL d'ordre n consiste à approximer f par un polynôme de degré n et un reste (le petit o) qui converge vers 0 plus rapidement que $(x-x_0)^n$
- (ii) Pas toutes les fonctions admettent un développement limité d'ordre n .
- (iii) Le théorème 8.2 assure que si f est n -x dérivable et $x_0 \in I$ f admet un DL d'ordre n autour de x_0 , et donne une formule pour le trouver
- (iv) Le DL est utile pour le calcul de limites quand

appliquer B-H devient
fastidieux

(vii) Il y a plusieurs façons
d'écrire les D-L :

$$f(x) = \sum_{h=0}^n a_h (x-x_0)^h + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) = \sum_{h=0}^n a_h (x-x_0)^h + r(x)$$

$$\text{où } r(x_0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

$$f(x) = \sum_{h=0}^n a_h (x-x_0)^h + R(x)(x-x_0)^n$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0) = 0.$$

Proposition 8.8

Le DL est unique, i.e. si

$$a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

sont tels que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n) \\ &= \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall 0 \leq k \leq n$, $a_k = b_k$

Exemple 8.9

Les DLs suivants autour de 0
sont à connaître par cœur:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(|x|^{2n})$$

if $n = 2m$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(|x|^{2m+1})$$

if $n = 2m+1$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(|x|^{2m})$$

if $n = 2m$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(|x|^{2m+1})$$

if $n = 2m+1$

(i) if $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \text{or} \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(|x|^n)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(|x|^n)$$

$$(ii) \frac{1}{1-x} = f(x), \quad x_0 = 0.$$

On a vu dans l'exemple 3.4.2
que la série géométrique de
raison x converge pour
 $|x| < 1$ et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} x^j}_{\frac{1}{1-x}} \quad (j = k - n - 1)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^n x^k}_1 + \underbrace{x^{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}}_{r(x)}$$

$$O_r, \quad O^{n+1} \frac{1}{1-x} = 0 \quad \&$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1} \frac{1}{1-x}}{x^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{1-x} = 0 \cdot \frac{1}{1-0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + O(1+x^n)$$

Proposition 8.10 (reste d'une composition de DL)

Soient $n, m \geq 1$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$,

$$r_f(x) = o(|x - x_0|^n) \quad \text{et}$$

$$g(y) = \sum_{k=0}^m b_k (y - y_0)^k + r_g(y)$$

$$\text{où } r_g(y) = o(|y - y_0|^m).$$

Supposons que $b_0 = g(y_0) = x_0$

$$r_f(g(y)) = o(|y - y_0|^n)$$

Exemple 8.11 :

(i) calculons le DL de $\frac{e^x}{1-x}$
autour de $x_0 = 0$, d'ordre

2

On a

$$\frac{e^x}{1-x} = \frac{1}{1-x} e^x$$

$$= \left(1+x+x^2 + o(|x|^2)\right) \left(1+x+\frac{x^2}{2} + o(|x|^2)\right)$$

$$= 1+2x+\frac{5}{2}x^2$$

$$+ o(|x|^2) + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + 2o(|x|^2)$$

$$+ 2x \cdot o(|x|^2) + \frac{3}{2}x^2 o(|x|^2)$$

$$+ o(|x|^2) \cdot o(|x|^2)$$

Une vérification directe donne
 x^3 & x^4 sont des $o(|x|^2)$

on peut aussi vérifier que

$$2 \cdot o(|x|^2) = o(|x|^2)$$

$$2x \cdot o(|x|^2) = o(|x|^3)$$

$$\Rightarrow 2x o(1x1^2) = o(1x1^2)$$

$$\frac{3}{2} x^2 \cdot o(1x1^2), o(1x1^2) \cdot o(1x1^2) = o(1x1^4)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} x^2 o(1x1^2), o(1x1^2) \cdot o(1x1^2) \\ = o(1x1^2)$$

$$\Rightarrow \frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2} x^2 + o(1x1^2)$$

(ii) Calculons le DL de $\cos(\pi + \sin(x))$ d'ordre 3 autour de 0.

⚠ pour calculer le DL de $f(g(x))$ autour de x_0 , on calcule le DL de g autour de x_0 , et le DL de f autour de $\boxed{g(x_0)}$

et on compose (es DLs !

$$\pi + \sin(x) = \pi + x - \frac{1}{6}x^3 + o(|x|^3)$$

$\pi + \sin(0) = \pi$ on développe
 $\cos(y)$ autour de $y_0 = \pi$

On a

$$\cos(\pi) = -1$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\cos'(\pi) = 0$$

$$\cos''(x) = -\cos(x)$$

$$\cos''(\pi) = 1$$

$$\cos'''(x) = \sin(x)$$

$$\cos'''(\pi) = 0$$

$\Rightarrow$ le DL d'ordre 3 de $\cos(x)$
autour de π est

$$\begin{aligned} \cos(x) = & -1 + \frac{0}{1!}(x-\pi) + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 \\ & + \frac{0}{3!}(x-\pi)^3 + o(|x-\pi|^3) \end{aligned}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} (x - \pi)^2 + o(|x - \pi|^3)$$

Donc $\overline{\pi} + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ $\overline{\pi} + \sin(x)$

$$\cos(\overline{\pi} + \sin(x))$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \left(\overline{\pi} + x - \frac{1}{6}x^3 + o(|x|^3) - \overline{\pi} \right)^2 + \underbrace{o(|\overline{\pi} + \sin(x) - \overline{\pi}|^3)}_{+o(|x|^3)}$$

⚠ ce truc ne veut rien dire.

$$= -1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$+ \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{2}o(x^3) \cdot o(x^3) - \frac{1}{6}x^4$$

$$+ x \cdot o(x^2) - \frac{1}{6}x^3 \cdot o(x^3)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}x^2 + o(|x|^3)$$

Exemple 8.12:

(i) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2) - \frac{1}{2} x \sin(x^3)}{x^8}$

x_0 ce vers quoi x tend $x_0 = 0$

n choisi de telle sorte que
le dénominateur a la forme
 $x^n + o(|x|^n)$ $n = 8$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 + o(|x|^8)$$

$$1 - \cos(x^2) = \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{24} x^8 + \frac{1}{6!} x^{12} - \frac{1}{8!} x^{16} + o(|x|^8)$$

$$= \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{24} x^8 + o(|x|^8)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + o(|x|^8)$$

$$\frac{1}{2} x \sin(x^3) = \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2 \cdot 3!} x^{10} + \frac{1}{2 \cdot 5!} x^{16}$$

$$- \frac{1}{2 \cdot 7!} x^{22} + \frac{1}{2} x o(|x|^8)$$

$$= \frac{1}{2} x^4 + o(|x|^8)$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2) - \frac{1}{2} x \sin(x^3)}{x^8} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{24} x^8 + o(x^8) - \left(\frac{1}{2} x^4 + o(x^8) \right)}{x^8} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{24} x^8 + o(x^8) - o(x^8)}{x^8} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{24} x^8 + o(x^8)}{x^8}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{24} + \underbrace{\frac{o(x^8)}{x^8}}_{\rightarrow 0} \right) = -\frac{1}{24}$$

(ii) Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2) - \frac{1}{2} x \sin(x^3)}{(\sin(x))^8}$

On a que $\sin(x) = (x + \dots)$

$$\sin(x)^8 = x^8 + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8)$$

$$(\sin(x))^8 = \left(\underline{x} - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8) \right)$$

8 factors

$$\begin{aligned} & \cdot \dots \\ & \cdot \left(\underline{x} - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8) \right) \\ & = x^8 + o(x^8) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2) - \frac{1}{2}x \sin(x^3)}{(\sin(x))^8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{24}x^8 + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/24 + o(x^8)/x^8}{1 + o(x^8)/x^8}$$

$$= -\frac{1}{24}$$

§ 8.2 Series de Taylor

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad x_0 \in \mathbb{R},$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + r_n(x)$$

$$\text{où } r_n(x) = o(|x-x_0|^n)$$

$$\text{Question: } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

(i) $f:]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k + \underbrace{r_n(x)}_{= o(x^{n+1})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - \sum_{k=0}^n x^k$$

$$= \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 0$$

$$\frac{1}{1-x} \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0) = 0$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)$$

$$= r_n(x)$$

$$\text{Si } x \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$$

$$= f(x) \neq 0$$